

ЗА ЗВЕЗДИТЕ И ТРОМПЕТИТЕ

Димитър Съслов*

ВРЪЗКАТА МЕЖДУ НЕЛИНЕЙНИТЕ УРАВНЕНИЯ И ЕСТЕТИЧЕСКАТА НАСЛАДА

Някои звезди твърде много напомнят на музикални инструменти с начина, по който поддържат правилни трептения. Разширението в края на тропетата отразява акустичната енергия и формира с устните на тропетиста стоящи вълни, произвеждайки музикален тон. Аналогично градиентът на плътността в близост до повърхността на звезда от класа на Цефеидите поддържа радиалните колебания. И при медните духови инструменти и при звездите нелинейността е тази, която в крайна сметка ни носи насладата от деликатната красота на виртуозната музика и удовлетворението от необикновеното проникновение.

Не може да не ни учудва как привидно несвързани едно с друго открития се правят почти по едно и също време. Макар съдбата им първоначално да е различна, идва ден - понякога чак след векове, - когато пътищата им се пресичат, за да ни доведат до ново, по-дълбоко разбиране на нещата. Един пример за такова сближение на две съвсем различни линии на човешкото познание - музиката и астрофизиката - ни връща към XVIII в.

70-те и 80-те години на XVIII в. са време на завидна активност в областта на теоретичната физика и астрономията. Тогава са обсъдени за пръв път - от Даниел Бернули и частично от Ойлер и Лагранж - уравненията за акустични вълни във въздушен стълб с променливо напречно сечение (т.нар. "рог"). Също по това време, през 1781 г., Хершел открива Уран - първата планета извън известната още от древността шесторка, включваща и Земята. Само три години по-късно един млад англичанин от Йорк, Джон Гудрайк, открива, че една от привличащите вниманието звезди в съзвездие Цефей (δ Cephei) променя яркостта си по съвсем закономерен начин с период от около 5

* Д-р Димитър Съслов завършва астрономия в СУ "Св. Климент Охридски" (1986 г.). Защитава докторска дисертация в Университета в Торонто (1991 г.). Работи в Харвардския Смитсонов център по астрофизика (САЩ).

деноноция. Намерени са и други подобни “нестабилни светлинни точки”, както ги нарича самият Гудрайк, с което всъщност е открит цял клас от звезди, наречен след това Цефеиди от прототипа δ Cephei. И двете открития - уравнението на рога и Цефеидите - получават шумното признание на съвременниците (Гудрайк става дори и най-младият член на Кралското дружество). Те обаче не оказват влияние върху музикалното изкуство или съответно астрономията и скоро са пренебрегнати и забравени.

Като се оставят настрана един-два незначителни повода през XIX в., тези открития се връщат във фокуса на вниманието по един ефектен начин - и отново практически едновременно - чак през второто десетилетие на XX в. Уравнението на рога е съживено от А. Уебстър през 1919 г. в Масачузетс и интересът на индустрията (радио, звукозапис, звукова локация и пр.) се запазва и до днес. Същевременно, макар и в свършено друга област, Хенриета Ливит от обсерваторията на Харвардския колеж (около 1912 г.) открива важното качество на Цефеидите като стандартни източници на светлина при измерване на големи разстояния във все още малката от онези години Вселена. Последващият интерес към този клас звезди (започвайки с работата на Едингтън в Англия от 1918 г.) стимулира развитието на теорията на звездните пулсации.

Продължаващите изследвания на акустиката на рога и на звездните пулсации през последните години доведоха до разбирането, че зад основните явления в тези две области стоят твърде сходни общи физически принципи.

Физика на медните духови инструменти. Какъв е механизмът, по който меден духов инструмент поддържа стабилни тонове? Различни рогове били успешно правени и се свирело на тях с векове, без физиците да са наясно как. Медните духови инструменти се състоят от наустник, тръба на наустника, главна цев и разширяваща се камбана. Цевта обикновено е цилиндрична (напр. при тромбона, тромпета, валдхорната), но би могла да бъде и слаборазширяващ се конус (напр. при тубата).

Медните духови инструменти заемат особено място сред музикалните инструменти, защото подобно на гласните струни в пеенето устните (дори цялата устна кухина) на музиканта са неделима част от музикалния инструмент. Следвайки обяснението на Херман Хелмхолц¹, един от великите физици със съществен принос в теорията на музиката, “... формата и напрегнатостта на устните на музиканта

само решават кой от многото собствени гласове на тубата ще се чуе”. И по-нататък в една дълбока и удивителна аналогия с механиката: “Ролята на въздуха в тубата по отношение на устните (освен като резониращо тяло, което усилва и променя тона) е да регулира като махало поддържането (а не пораждането) на периодични колебания на устните. “Макар устните на тромпетиста да пораждаат изцяло звука на тромпета, сами по себе си те издават един слаб, неясен и немусикален шум. Според едно лаконично съвременно обяснение на артур Бинейд “тромпетът издава музикален тон, когато вибрациите на устните на тромпетиста взаимодействат със стоящите вълни в инструмента; тези вълни се образуват, когато акустичната енергия се връща от камбаната на инструмента”.

Какъв е механизмът за това? Вълната, разпространяваща се в разширението на тромпета, се описва с едномерно вълново уравнение, датиращо от времето на изследванията на Бернули² върху тръбите и получило известност във формата, предложена от Уебстър³ като *уравнение на рога*. В началото на 70-те години на нашия век Бинейд и Янсон предлагат субституция, свързваща налягането и площта на вълновия фронт посредством вълновата функция ϕ , която удовлетворява стационарното уравнение на рога.

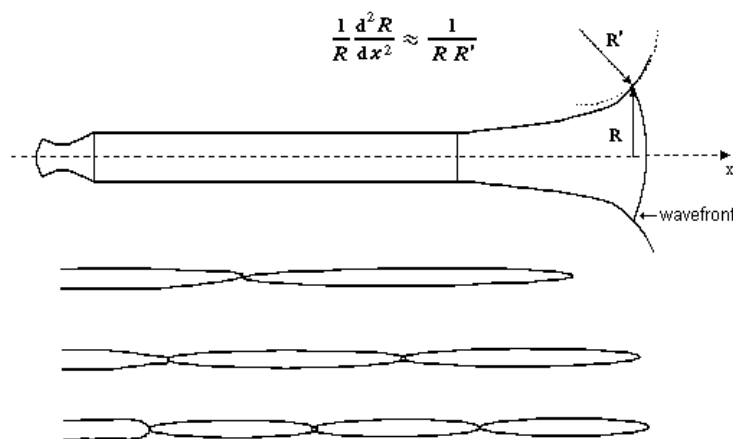
$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left[\left(\frac{w}{c} \right)^2 - \frac{1}{R} \frac{d^2R}{dx^2} \right] \psi = 0,$$

където w е акустичната честота, c - скоростта на звука, R - локалният радиус на рога (фиг. 1). Уравнението показва, че акустичната вълна се разпространява или не в зависимост от това, дали

$$\left(\frac{w}{c} \right)^2 > \frac{1}{R} \frac{d^2R}{dx^2}.$$

Честотата w , при която е в сила равенството, се нарича критична честота за съответната част на рога. При честоти под w дължината на акустичната вълна става имагинерно число, вълните променят характера си и се отразяват обратно към рога. Тази акустична бариера се определя от големината на израза в дясната страна, често пъти наричан функция на рога, която описва свойствата на камбаната

(фиг. 1). С придвижването на вълната към разширението на цевта на тропетата налягането бавно спада, тъй като енергията се разпределя върху все по-широк вълнов фронт. Площта на вълновия фронт започва да нараства особено бързо, когато вълната достигне камбаната. При това налягането рязко пада и вълната се отразява назад. Взаимодействайки със следващите вълни и с вибриращите устни в другия край на цевта, отразената вълна образува стабилни стоящи вълни с характерна форма. В тропетата едновременно съществуват стоящи вълни, съставени от (обикновено хармонични) вълни с различна дължина; в първо приближение (т.нар. линейна теория) тези съставлящи не си влияят взаимно.

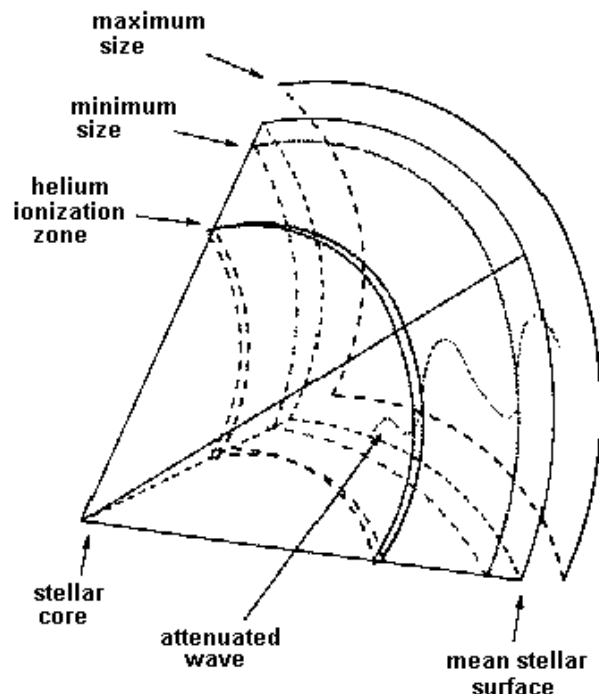


Фиг. 1. Формата на въздушния стълб в инструмент, подобен на тропетата, със стояща вълна с три слаби хармонични. Забележете отместването в положението на акустичната бариера на тръбата – скъсяването на вълната и по-нататъшното ѝ отразяване назад. Функцията на тръбата се дава приблизително от вътрешния напречен радиус R на тръбата и външния надлъжен радиус на кривината R' .

Това е начинът, по който тропетът улавя акустичните вълни и произвежда продължителни тонове. Акустичната бариера на камбаната не успява да задържи всички вълни, особено високочестотните, но е достатъчна за стабилни стоящи вълни в целия достъпен за ухото спектър. За сравнение един коничен рог (напр. функцията на високоговорител) има нулева функция на рога, следователно няма критична честота и може само да излъчва звук.

Физика на Цефеидите. В линейната теория на звездните пулсации се стига (доста неочаквано) до практически същия резултат. Радиалните пулсации с малка амплитуда на газово кълбо в собственото му поле на тежестта се описват от линейното адиабатично вълново уравнение, което се свежда до едномерно уравнение поради сферичната симетрия на звездата. През 1966 г. Мелцер и Торн⁴ приложиха към това уравнение смяна на променливите, която е идентична с приложената към уравнението на рога. В резултат двете уравнения придобиват идентично записване с единствената разлика, че на мястото на функцията на рога се получава дълъг израз, който зависи от градиентите на плътността и на налягането и от уравнението за състоянието на газа. Ето защо в линейното уравнение на звездни пулсации критичната честота зависи от големината на тези градиенти по същия начин, по който критичната честота в уравнението на рога зависи от формата на рога.

Аналогията, до която се достига, е забележителна: по същия начин, по който медната тръба на един тромпет провежда и оформя звуковите вълни на въздуха вътре в него, градиентът на плътността на една звезда провежда и оформя звуковите вълни на газа, които се зараждат на дъното на звездната обвивка. Резкият спад на плътността на газа на повърхността на звездата играе същата роля като рязко разширяващата се камбана на тромпета. Вълните, идващи от вътрешността на звездата, се отразяват от повърхността и пораждат стоящи вълни. Цефеидите са звезди, при които са налице условията да бъдат уловени и превърнати в стоящи вълни тъкмо (главно) колебанията, възбудени дълбоко в недрата им в зоната на йонизация на хелия (фиг. 2). Съвсем като тромпетите и Цефеидите притежават “фина настройка” и чрез същия физически механизъм поддържат учудващо постоянни пулсации. За звездите, стотици пъти по-големи от Слънцето, тези пулсации са тъй подходящи за часовник, както е периодът на въртене на Земята!



Фиг. 2. Схематичен вид на Цефеида. Изменението на радиуса на звездата е около 10 % от нейния размер. Концентричните сферични вълни, възбудени от хелиевата зона на йонизация, се разпространяват навън, отразяват се назад от повърхността и формират стояща вълна в околността. Вълните, разпространяващи се навътре, са силно затихващи под зоната на йонизация и не навлизат много дълбоко.

Ролята на устните на тропетиста тук се изпълнява от зоната на йонизация на някои от разпространените елементи (напр. H, He, C), действаща като клапан за енергетични поток от звездните недра. Клапанныят механизъм е необходим, но не и достатъчен да накара звездата да пулсира. Тя трябва също и да “откликва”, т.е. да е настроена на честотата на колебанията, възбудени от йонизиращия слой в обвивката ѝ. Поради това съвсем малко са звездите, които пулсират по закономерен начин и с достатъчна амплитуда. С изключение на Цефеидите и на още няколко класа от променливи звезди, повечето звезди са ужасно “разстроени” и както нашето Слънце изпитват нерадиални колебания с практически ненаблюдаема амплитуда. (Такива осцилации впрочем са аналогични на вибрациите в

едно друго семейство от музикални инструменти - дървените духови инструменти кларнет, обой и т.н.)

Нелинейност. Дотук дискусията е изцяло в областта на линейните системи, т.е. системи, в които приложените налягания и сили са пропорционални на резултантните потоци и отклонения. Линейната теория е проста и дава добра основна представа, но в реалния свят в най-добрия случай е само приблизителна. Чисто хармонични системи не съществуват. Генерацията на хармонични системи, която лежи в основата на цялата красота на музиката, е съществено нелинейна по природа. Реалните звезди също са нелинейни системи.

Накратко линейната физика описва отделни трептения - тонове ("моди"), и техните характеристични честоти, докато нелинейната физика изучава взаимодействието на тези моди. В музикалните резонатори (като въздушния стълб в тромпета) отношенията на честотите на нормалните тонове са много близки до цели числа, затова възбуждането им води до неповтаряща се форма на вълната. Продължителните тонове на тромпета обаче имат точно повтаряща се форма на вълната – нелинейното взаимодействие между отделните естествени тонове ги заключва в точни честотни и фазови съотношения. Опитният музикант чрез разнообразни изпълнителски техники използва тези нелинейни взаимодействия, за да управлява качеството на тоновете.

Наличието на нелинейни ефекти у пулсиращите звезди се появява най-често като асиметрии в техните криви на блясъка и радиалните скорости. Пример за това е появата на вторичен максимум ("гърбица") като функция на пулсационния период в кривите на Цефеиди, описани от Херцшпрунг през 1926 г. Други нелинейни ефекти допринасят за относителната еднообразност в пулсационните амплитуди на Цефеидите. Десетилетията на непрекъснато усъвършенстващи се наблюдения на Цефеидите, в които българските астрономи имат значителен принос, вдъхновиха и спомогнаха за създаването на нелинейната теория на звездните пулсации. През последните години тези изследвания бяха разширени, за да обхванат и силно нелинейната повърхност (или атмосфера) на Цефеидите и граничните условия, които водят до решение на линейната теория във вид на стоящи вълни. Отклонение от равновесието в атмосферата на Цефеида би трябвало да доведе до излъчване на рентгенови лъчи. Това

предсказание на автора ще бъде проверено от новия орбитален рентгенов телескоп ROSAT⁵.

Наблюдаваната от Херцшпрунг “гърбица”, която дълги години е оставала необяснена, днес се интерпретира⁶ като резонанс на отделни тонове. По своята природа този нелинеен ефект е поразителен аналог на резонансите на вокалния тракт, които могат да се изсвирят на медните духови инструменти. Най-забележителна е изпълнителската техника на изпяване на нотата при валдхорната, когато музикантът държи басов тон в *pianissimo* и едновременно изпява във валдхорната втори тон, като по този начин създава трети и четвърти резонанс. Ефектът е почти магичен като например в Концертино за валдхорна и оркестър в ми минор от Вебер⁷. Друга техника за преразпределяне на енергията между хармониките се използва понякога от виртуозни джаз-тромпетисти чрез прекалено силно духане, “пренадуване” - напр. от Майлс Дейвис в записа от 1969 г. *Bitches Brew*⁸.

Нека се върнем към линейната теория и към управлението на рога във вида, приведен по-горе. По същество това уравнение е същото като уравнението на Шрьодингер за линеен квантовомеханичен осцилатор в потенциална яма. Уравнението на линейната адиабатична вълнова теория на звездните пулсации също има тази форма. И трите уравнения определят вълнова бариера от някакъв вид чрез условията за отражение и за установяване на стоящи вълни.

На пръв поглед сходството между три съвършено различни физически системи е изненадващо. Един поглед върху уравненията и начина на извеждането им обаче открива някои, макар и несъществени, общи черти: привеждането им до едномерни уравнения и общата геометрия (допускаща подобни субституции), водещи до еднотипни линейни вълнови моди. Физиката остава по същество главно в параметрите на уравненията - съответно функцията на рога, градиента на плътността и квантовата потенциална енергия. Простата пропорционалност на тези три величини установява известна инвариантност на вълновите моди от звездни до субатомни мащаби. Този резултат все пак е почти тривиален и видимата аналогия е повърхностна (отразявайки по-скоро историческото развитие на методите и инструментариума на физиката). Дълбоката аналогия изглежда е в друго: в удивителната (макар и несъвършена) прецизност, с която различните нелинейни явления удовлетворяват същата проста “линейна” симетрия.

Това може да промени гледната точка върху разглежданите тук системи. При звездните пулсации линейната динамична стабилност изглежда, че отстъпва централното си място на общата нестабилност.

С други думи всички звезди изпитват в някаква степен едромасабни движения в обвивката си, но само понякога те се проявяват като осцилации в смисъла и духа на линейната теория. Подобно на тях в музиката простотата и яснотата на линейната симетрия се достига чрез умела употреба на сложни нелинейни ефекти. В заключителните думи на Хелмхолц⁹ “ ... защото, като долавяме във всичко следите от порядък и взаимосвързаност, без да сме в състояние да схванем закона и цялостния план, в съзнанието ни се ражда чувството, че съзерцаваме творба, чийто замисъл далеч надхвърля всичко онова, което сме способни да си представим в момента, и с това добива чертите на безграничното.”

Литература

1. Н. Helmholtz. *Die Lehre von den Tonempfindungen*, IV, 1977. Превод А. J. Ellis. *On the Sensation of Tone*, Dover, NY, 1954, 97-100. Тази книга е забележителен труд, който успява да обедини теорията и практиката на физиологията, анатомията и физиката и да свърже здраво до наши дни тези науки с изящните изкуства. Професионалният превод е допълнен с множество технически бележки.
2. *Mem. d. l'Acad. d. Sci.*, 1762; J. W. Rayleigh. *The Theory of Sound*. Vol. 2. 1878, Dover, p. 114.
3. A. G. Webster. *Nat. Acad. Sci. Proc.*, 5, 1919, p. 275; *ibid* 6, 1920, p. 320.
4. D. W. Meltzer, K. S. Thorne. *Astrophys. J.*, 145, p.514; L. Axel, F. Perkins; *ibid* 163, 1971, p. 29.
5. ROSAT = Röntgensatellit - изкуствен спътник на Земята с рентгенов телескоп на борда, проект на САЩ, Германия и Великобритания.
6. Moskalik, J. R. Bucheier, A. Marom. *Astrophys. J.* 385, 1992, p. 685.
7. Забележителен запис на концерта на Херман Бауман с лайпцигския Гевандхаус оркестър (*Polacca*) (Philips 412-237-2). Авторът е задължен на Дж. М. Шефърд, бивш изпълнител на класическият тромпет в Симфоничния оркестър на Торонто, за посочената прекрасна изпълнителска техника.
8. Miles Davis. *Bitches Brew* (Columbia Records, JT 40579); гореща благодарност на С. А. Уитни за посоченото изпълнение.
9. Н. Helmholtz. *On the Sensation of Tones*, Dover, NY, 1954, p. 367.

